

长沙市一中 2022 届高三月考试卷(一)

数学

时量:120 分钟 满分:150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1.已知复数 $z_1 = a - i, z_2 = 2 + i$ (i 为虚数单位),若 $z_1 z_2$ 是纯虚数.则实数 $a =$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 3

2.若 $\log_a^b < 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$). $2^{b^2-b} > 1$. 则

- A. $a > 1, b > 1$ B. $a > 1, 0 < b < 1$ C. $0 < a < 1, b > 1$ D. $0 < a < 1, 0 < b < 1$

3.已知圆 $O: x^2 + y^2 = 25$, 则过圆 O 上一点 $A(3, 4)$ 的切线方程为

- A. $3x + 4y - 25 = 0$ B. $4x + 3y - 24 = 0$ C. $3x - 4y + 7 = 0$ D. $4x - 3y = 0$

4.“平均增长最”是指一段时间内某一数据指标增长企的平均值.其计算方法是将每一期增长

武相加后,除以期数.即 $\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})}{n-1}$ 国内生产总值(GDP)被公认为是衡量国家经济状况的最

佳指标, 下表是我国 2015 — 2019 年 GDP 数据:

年份	2015	2016	2017	2018	2019
国内生产总值/万亿	68.89	74.64	83.20	91.93	99.09

根据表中数据,2015- 2019 年我国 GDP 的平均增长量为

- A. 5.03 万亿 B. 6.04 万亿 C. 7.55 万亿 D. 10.07 万亿

5.在 $\triangle ABC$ 中, O 为中线 AM 上的中点, 若 $AM = 2$. 则 $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 等于

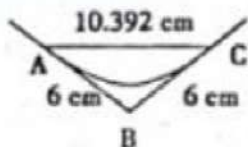
- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

6.某校开设 A 类选修课 4 门. B 类选修课 3 门, 每位同学从中选 3 门. 若要求两类课程中都至少选一门, 则不同的过法共有

- A. 18 种 B. 24 种 C. 30 种 D. 36 种

7.达芬奇的经典之作《蒙娜丽莎》举世闻名。如图, 画中女子神秘的微笑, 数百年来让无数观赏者入迷. 某业余爱好者对《蒙娜丽莎》的缩小影像作品进行了测绘, 将画中女子的嘴唇近似看作一个圆弧, 在嘴角 A, C 处作圆弧的切线, 两条切线交于 B 点, 测得如下数据: $AB = BC = 6 \text{ cm}$, $AC = 10.392 \text{ cm}$ 根据测量得到的结果推算: 将《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的

圆心角大约等于(注: $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$)



- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

8. 已知数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_1 = a$ 且 $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ 2a_n, & n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$

的前 n 项和, 若 $S_{2020} = 1$ 则的 a 值为

- A. $\frac{1}{3030}$ B. $\frac{1}{2020}$ C. $\frac{1}{1515}$ D. 1

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知集合 $M = \{x | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, $N = \{x | x > -1\}$, 则

- A. $N \subseteq M$ B. $M \subseteq N$ C. $M \cap N \neq \emptyset$ D. $M \cup C_R N = R$

10. 若将函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{12})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列说法正确的是

- A. $g(x)$ 的最小正周期为 π B. $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减
C. 函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称 D. $g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$

11. 已知实数 x, y, z 满足 $z \cdot \ln x = z \cdot e^y = 1$. 则下列关系式中可能成立的是

- A. $x > y > z$ B. $x > z > y$ C. $z > x > y$ D. $z > y > x$

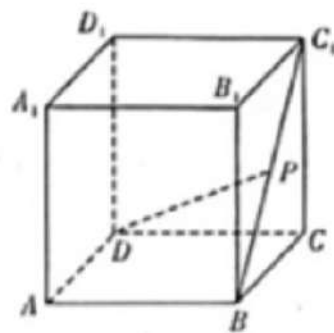
12. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为线段 BC_1 上的动点, 下列说法正确的是

A. 对任意点 P , $DP \parallel$ 平面 AB_1D_1

B. 三棱锥 $P-ADD$ 的体积为 $\frac{1}{3}$

C. 线段 DP 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. 存在点 P , 使得 DP 与平面 ADD_1A_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 函数 $f(x) = (x+2)\ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 _____

14. 已知圆柱的高为 1, 它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上, 则该圆柱的体积为_____.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , P 为 C 的右支上一点, 且

$|PF_2| = |F_1F_2|$ 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积等于_____.

16. 甲箱中有 5 个红球, 2 个白球和 3 个黑球, 乙箱中有 4 个红球, 3 个白球和 3 个黑球. 先从甲箱中随机取出 1 球放入乙箱中, 分别以 A_1 、 A_2 、 A_3 表示由甲箱中取出的是红球, 白球和黑球的事件; 再从乙箱中随机取出一球, 以 B 表示由乙箱中取出的球是红球的事件, 则 $P(B|A_1) = \underline{\hspace{1cm}}$.
 $P(B) = \underline{\hspace{1cm}}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin B + \sqrt{3}b \cos A = 0$

(1) 求角 A 的大小;

(2) 设 D 为 BC 边上一点, 且 $AD \perp AC$, 若 $a = 2\sqrt{7}$, $b = 2$. 求 $\triangle ABD$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

携号转网, 也称作号码携带、移机不改号, 即无需改变自己的手机号码, 就能转换运营商, 并享受其提供的各种服务. 2019 年 11 月 27 日, 工信部宣布携号转网在全国范围正式启动. 某运营商为提质量保客户, 从运营系统中选出 300 名客户, 对业务水平和服务水平的评价进行统计, 其中业务水平的满意率为 $\frac{13}{15}$, 服务水平的满意率为 $\frac{2}{3}$, 对业务水平和服务水平都满意的客户有 180 人.

(1) 完成下面 2×2 列联表, 并分析是否有 97.5% 的把握认为业务水平与服务水平有关;

	对服务水平满意人数	对服务水平不满意人数	合计
对业务水平满意人数			
对业务水平不满意人数			
合计			

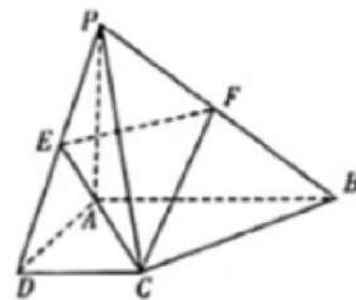
(2) 为进一步提高服务质量, 在选出的对服务水平不满意的客户中, 抽取 2 名征求改进意见, 用 X 表示对业务水平不满意的人数, 求 X 的分布列与期望.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形 $\angle BAD = 90^\circ$, $AB = AD = 2DC = 2\sqrt{2}$, E 、 F 分别为 PD 、 PB 的中点.



(1) 求证: $CF \parallel$ 平面 PAD ;

(2) 若截面 CEF 与底面 $ABCD$ 所成锐二面角为 $\frac{\pi}{4}$, 求 PA 的长度.

20. (本小题满分 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, a_1 、 a_2 、 a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数,

且 a_1 、 a_2 、 a_3 中的任何两个数都不在的同一列, 且 $a_1 \in \{1, 3\}$.

	第一列	第二列	第三列
第一行			
第二行	4	6	9
第三行	12	8	7

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = (-1)^{n+1} a_n^2$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 3(x-1)e^x - \frac{3}{2}ax^2$, 其中实数 $a \in (0, +\infty)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性

(2) 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 证明: 关于 x 的方程 $f(x) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}ax^2 - x^3$ 有唯一实数解.

22. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线与半椭圆 $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (x \leq 0)$ 相交于 A, B 两点, 且

$$|AB| = \sqrt{3}.$$

(1) 求抛物线 C_1 的方程

(2) 若点 P 是半椭圆 C_2 上一动点; 过点 P 作抛物线 C_1 的两条切线, 切点分别为 C 、 D , 求 $\triangle PCD$ 面积的取值范围

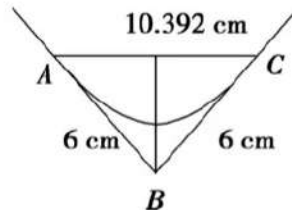
数学参考答案

一、二、选择题

1. A 【解析】由已知 $z_1 z_2 = (a-i)(2+i) = (2a+1) + (a-2)i$ 是纯虚数, 所以 $2a+1=0$ 且 $a-2 \neq 0$, 可得 $a = -\frac{1}{2}$, 故选 A.
2. C 【解析】因为 $2^{b^2-b} > 1$, 所以 $b^2-b > 0$, 因为 $b > 0$, 所以 $b > 1$, 因为 $\log_a b < 0$, $b > 1$, 所以 $0 < a < 1$, 故选 C.
3. A 【解析】圆 $x^2 + y^2 = 25$ 的圆心为 $O(0,0)$, 则直线 AO 的斜率 $k_{OA} = \frac{4}{3}$, 故切线的斜率 $k = -\frac{1}{k_{OA}} = -\frac{3}{4}$, 所以切线方程为 $y-4 = -\frac{3}{4}(x-3)$, 化简得: $3x+4y-25=0$, 故选 A.
4. C 【解析】由题意得, 2015-2019 年我国 GDP 的平均增长量为:

$$\frac{(74.64-68.89)+(83.20-74.64)+(91.93-83.20)+(99.09-91.93)}{5-1} = \frac{(99.09-68.89)}{4} = 7.55 \text{ 万亿.}$$
 故选 C.
5. D 【解析】因为 O 为中线 AM 上的中点, $AM=2$, 所以 $AO=OM=1$, 且 $\vec{OA}$ 与 $\vec{OM}$ 的夹角为 π , 所以 $\vec{OA} \cdot (\vec{OB} + \vec{OC}) = \vec{OA} \cdot 2\vec{OM} = 2|\vec{OA}| \cdot |\vec{OM}| \cos \pi = -2$. 故选 D.
6. C 【解析】根据题意, 分两种情况讨论: ①若从 A 类课程中选 1 门, 从 B 类课程中选 2 门, 有 $C_4^1 \cdot C_3^2 = 12$ (种) 选法; ②若从 A 类课程中选 2 门, 从 B 类课程中选 1 门, 有 $C_4^2 \cdot C_3^1 = 18$ (种) 选法. 综上, 两类课程中都至少选一门的选法有 $12+18=30$ (种). 故选 C.

7. B 【解析】 $\because AB=BC=6 \text{ cm}, AC=10.392 \text{ cm}$. 设 $\angle ABC=2\theta$. 所以 $\sin \theta = \frac{10.392}{6} = 0.866 \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$ (因为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$), 又由题意 θ 必为锐角, 可得 $\theta \approx \frac{\pi}{3}$, 设《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角为 α . 则 $\alpha+2\theta=\pi$, 得 $\alpha=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

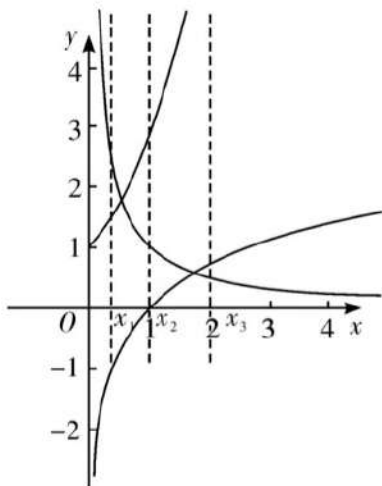


8. C 【解析】由 $a_1 = a$ 且 $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & n=2k-1, k \in \mathbb{N}^*, \\ 2a_n, & n=2k, k \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$ 得 $a_2 = \frac{1}{2}a, a_3 = a, a_4 = \frac{1}{2}a, \dots$, 所以, $a_n = \begin{cases} a, & n=2k-1, k \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{1}{2}a, & n=2k, k \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$ $S_{2020} = 1010a + 1010 \times \frac{1}{2}a = 1515a$, 又 $S_{2020} = 1$, 所以 $1515a = 1$, 解得 $a = \frac{1}{1515}$, 故选 C.

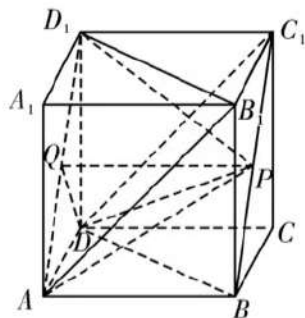
9. BC 【解析】因为 $M = \{x | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, 解不等式得 $M = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$, 且 $N = \{x | x > -1\}$, 所以 $M \subseteq N$, $M \cap N = \{x | 1 \leq x \leq 2\} \neq \emptyset$, $M \cup \complement_{\mathbb{R}} N = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } 1 \leq x \leq 2\} \neq \mathbb{R}$. 故选 BC.

10. ACD 【解析】 $g(x) = \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{12}\right] = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. $g(x)$ 的最小正周期为 π , 选项 A 正确; 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ 时, 故 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有增有减, 选项 B 错误; 因为 $g\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$, 所以 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称, 选项 C 正确; 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, 且当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $g(x)$ 取最小值 $-\frac{1}{2}$, 选项 D 正确. 故选 ACD.

11. ABC 【解析】设 $\ln x = e^y = \frac{1}{z} = k, k > 0$, 则 $x = e^k, y = \ln k, z = \frac{1}{k}$, 画出函数图象, 如图所示: 当 $k = x_1$ 时, $z > x > y$; 当 $k = x_2$ 时, $x > z > y$; 当 $k = x_3$ 时, $x > y > z$; 故选 ABC.



12. AC 【解析】由题可知, 正方体的面对角线长度为 $\sqrt{2}$, 对于 A, 分别连接 C_1D 、 BD 、 B_1D_1 、 AB_1 、 AD_1 , 易得平面 $C_1DB \parallel$ 平面 AB_1D_1 , $DP \subset$ 平面 C_1DB , 故对任意点 P , $DP \parallel$ 平面 AB_1D_1 , 故 A 正确; 对于 B, 分别连接 PA 、 PD_1 , 无论点 P 在哪个位置, 三棱锥 $P-A_1DD_1$ 的高均为 1, 底面 A_1DD_1 的面积为 $\frac{1}{2}$, 所以三棱锥 $P-A_1DD_1$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$, 故 B 错误; 对于 C, 线段 DP 在 $\triangle C_1BD$ 中, 当点 P 为 BC_1

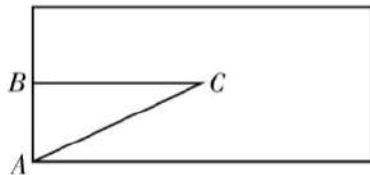


的中点时, DP 最小, 此时 $DP \perp BC_1$, 在 $\text{Rt}\triangle BPD$ 中, $DP = \sqrt{BD^2 - PB^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 DP 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 C 正确; 对于 D, 点 P 在平面 ADD_1A_1 上的投影在线段 AD_1 上, 设点 P 的投影为点 Q , 则 $\angle PDQ$ 为 DP 与平面 ADD_1A_1 所成的角, $\sin \angle PDQ = \frac{PQ}{PD}$, $PQ = 1$, 而 $\frac{\sqrt{6}}{2} \leq PD \leq \sqrt{2}$, 所以 DP 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$, 而 $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以不存在点 P , 使得 DP 与平面 ADD_1A_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 故 D 错误. 故选 AC.

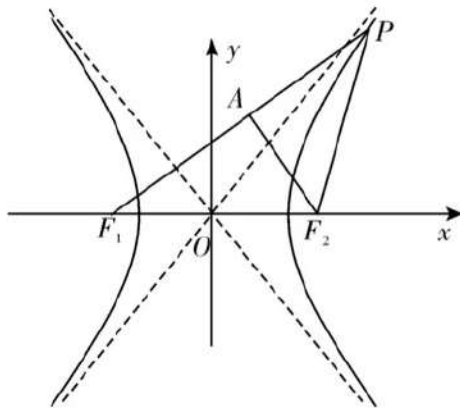
三、填空题

13. $3x - y - 3 = 0$ 【解析】因为 $f'(x) = \ln x + \frac{2+x}{x}$, 所以 $f'(1) = 3$, 因为 $f(1) = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 3(x - 1)$, 即 $3x - y - 3 = 0$.

14. $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】圆柱的轴截面如图, $AC = 1, AB = \frac{1}{2}$, 所以圆柱底面半径 $r = BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则圆柱的体积是 $V = \pi r^2 h = \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{3}{4}\pi$.



15. 48 【解析】 $\because$ 双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 中 $a = 3, b = 4, c = 5, \therefore F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$,



$$\because |PF_2| = |F_1F_2|, \therefore |PF_1| = 2a + |PF_2| = 6 + 10 = 16,$$

$$\text{作 } PF_1 \text{ 边上的高 } AF_2, \text{ 则 } AF_1 = 8, \therefore AF_2 = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$$\therefore \triangle PF_1F_2 \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |AF_2| = \frac{1}{2} \times 16 \times 6 = 48.$$

16. $\frac{5}{11}, \frac{9}{22}$ 【解析】因为每次取一球, 所以 A_1, A_2, A_3 是两两互斥的事件,

$$\text{因为 } P(A_1) = \frac{5}{10}, P(A_2) = \frac{2}{10}, P(A_3) = \frac{3}{10}, \text{ 所以 } P(B|A_1) = \frac{P(BA_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{5}{10} \times \frac{5}{11}}{\frac{5}{10}} = \frac{5}{11};$$

$$\text{同理 } P(B|A_2) = \frac{P(BA_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{2}{10} \times \frac{4}{11}}{\frac{2}{10}} = \frac{4}{11}, P(B|A_3) = \frac{P(BA_3)}{P(A_3)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{4}{11}}{\frac{3}{10}} = \frac{4}{11},$$

$$\text{所以 } P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{11} + \frac{2}{10} \times \frac{4}{11} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{11} = \frac{9}{22}.$$

四、解答题

17. 【解析】(1) 由正弦定理及 $a \sin B + \sqrt{3} b \cos A = 0$ 得 $\sin A \sin B + \sqrt{3} \sin B \cos A = 0$.

$$\text{又在 } \triangle ABC \text{ 中, } \sin B > 0, \therefore \sin A + \sqrt{3} \cos A = 0,$$

$$\text{得 } \tan A = -\sqrt{3}, \because 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{2\pi}{3}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 及 } a = 2\sqrt{7}, b = 2 \text{ 及余弦定理, 得 } 28 = 4 + c^2 - 4c \cdot \cos \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{即 } c^2 + 2c - 24 = 0, \text{ 解得 } c = -6 (\text{舍去}), c = 4. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{由题设可得 } \angle CAD = \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \angle BAD = \angle BAC - \angle CAD = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{故 } \triangle ABD \text{ 与 } \triangle ACD \text{ 面积的比值为 } \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2} AC \cdot AD} = 1.$$

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \sin \angle BAC = 2\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \triangle ABD \text{ 的面积为 } \sqrt{3}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 【解析】(1)由题意知对业务水平满意的有 260 人,对服务水平满意的有 200 人,得 2×2 列联表

	对服务水平满意人数	对服务水平不满意人数	合计
对业务水平满意人数	180	80	260
对业务水平不满意人数	20	20	40
合计	200	100	300

..... 2 分

经计算得 $K^2 = \frac{300 \times (180 \times 20 - 80 \times 20)^2}{200 \times 100 \times 260 \times 40} = \frac{75}{13} \approx 5.77 > 5.024$, 5 分

所以有 97.5% 的把握认为业务水平满意与服务水平满意有关. 6 分

(2) X 的可能值为 0, 1, 2.

$$\text{则 } P(X=0) = \frac{C_{20}^0 C_{80}^2}{C_{100}^2} = \frac{316}{495},$$

$$P(X=1) = \frac{C_{20}^1 C_{80}^1}{C_{100}^2} = \frac{160}{495},$$

$$P(X=2) = \frac{C_{20}^2}{C_{100}^2} = \frac{19}{495}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

X	0	1	2
P	$\frac{316}{495}$	$\frac{160}{495}$	$\frac{19}{495}$

..... 10 分

$$E(X) = 0 \times \frac{316}{495} + 1 \times \frac{160}{495} + 2 \times \frac{19}{495} = \frac{2}{5}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 【解析】(1)证明:取 PA 的中点 Q , 连接 QF, QD ,

$\because F$ 是 PB 的中点, $\therefore QF \parallel AB$, 且 $QF = \frac{1}{2}AB$.

$\because$ 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle CDA = \angle BAD = 90^\circ$, $AB = AD = 2DC = 2\sqrt{2}$,

$\therefore CD \parallel AB$, $CD = \frac{1}{2}AB$, $\therefore QF \parallel CD$, 且 $QF = CD$,

$\therefore$ 四边形 $QFCD$ 是平行四边形, $\therefore FC \parallel QD$.

又 $\because FC \not\subset$ 平面 PAD , $QD \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore FC \parallel$ 平面 PAD 6 分

(2) 如图, 分别以 AD, AB, AP 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

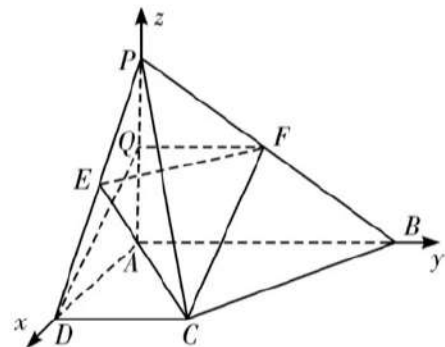
设 $PA = a (a > 0)$, 则 $A(0, 0, 0)$, $B(0, 2\sqrt{2}, 0)$, $C(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$,
 $E(\sqrt{2}, 0, \frac{a}{2})$, $F(0, \sqrt{2}, \frac{a}{2})$ 7 分

取平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$,

$$\overrightarrow{CE} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{a}{2}),$$

$$\overrightarrow{CF} = (-2\sqrt{2}, 0, \frac{a}{2}),$$

设平面 CEF 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,



$$\text{则有} \begin{cases} \vec{CE} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \\ \vec{CF} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \frac{a}{2}z = 0, \\ -2\sqrt{2}x + \frac{a}{2}z = 0, \end{cases}$$

不妨取 $z = 4\sqrt{2}$, 则 $x = a, y = a$, 即 $\mathbf{n}_2 = (a, a, 4\sqrt{2})$, 10 分

$$\therefore |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + 32}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $a = 4$, 即 PA 的长为 4. 12 分

20. 【解析】(1) 若 $a_1 = 3$,

当第一行第一列为 a_1 时, 由题意知, 可能的组合有,

$a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 7$ 不是等差数列, $a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 = 8$ 不是等差数列; 2 分

当第一行第二列为 a_1 时, 由题意知, 可能的组合有, $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 7$ 不是等差数列,

$a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 = 12$ 不是等差数列; 4 分

当第一行第三列为 a_1 时, 由题意知, 可能的组合有, $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 8$ 不是等差数列,

$a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 12$ 不是等差数列,

则 $a_1 = 3$ 放在第一行的任何一列, 满足条件的等差数列 $\{a_n\}$ 都不存在,

故 $a_1 = 1$, 从而 $a_2 = 4, a_3 = 7$.

综上所述: $a_n = 3n - 2, n \in \mathbf{N}^*$ 6 分

(2) 由(1)知, $b_n = (-1)^{n+1} (3n - 2)^2$,

当 n 为偶数时,

$$\begin{aligned} T_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - a_n^2 \\ &= (a_1 + a_2)(a_1 - a_2) + (a_3 + a_4)(a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} + a_n)(a_{n-1} - a_n) \\ &= -3(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = -3 \times \frac{n(1 + 3n - 2)}{2} = -\frac{9}{2}n^2 + \frac{3}{2}n, \end{aligned}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = T_{n-1} + b_n = -\frac{9}{2}(n-1)^2 + \frac{3}{2}(n-1) + (3n-2)^2 = \frac{9}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 2,$$

$$\therefore T_n = \begin{cases} -\frac{9}{2}n^2 + \frac{3}{2}n, & n = 2k, k \in \mathbf{N}^*, \\ \frac{9}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 2, & n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^*. \end{cases} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 【解析】(1) 依题意, $f'(x) = 3xe^x - 3ax = 3x(e^x - a)$,

当 $a = 1$ 时, 当 $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增. 2 分

当 $0 < a < 1$ 时, $\ln a < 0$ 时, 当 $x \in (-\infty, \ln a)$, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (\ln a, 0)$, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

当 $a > 1$ 时, $\ln a > 0$ 时, 当 $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (0, \ln a)$, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

$x \in (\ln a, +\infty)$, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增. 5 分

$$(2) \text{依题意, } 3(x-1)e^x + x^3 - 3ax^2 + \frac{3}{2} = 0, \text{即 } (x-1)e^x + \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\text{令 } g(x) = (x-1)e^x + \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } g'(x) = xe^x + x^2 - 2ax = x(e^x + x - 2a); \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 令 $h(x) = e^x + x - 2a$, 则 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

因为 $h(0)=1-2a<0$, 7 分

$h(a)=e^a-a$, 当 $a>\frac{1}{2}$ 时, $h'(a)=e^a-1>0$, $h(a)$ 单调递增, 所以 $h(a)>h(\frac{1}{2})>0$,

所以 $h(a)=e^a-a>0$, 9 分

故存在唯一实数 $x_1 \in (0, a)$, 使得 $h(x_1)=0$, 即 $g'(x_1)=0$,

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $g(x_1)<g(0)=-1+\frac{1}{2}<0$, 10 分

$g(3a)=(3a-1)e^{3a}+\frac{1}{3} \cdot (3a)^3-a \cdot (3a)^2+\frac{1}{2}=(3a-1)e^{3a}+\frac{1}{2}>0$, 11 分

故当 $a>\frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x)$ 恰有 1 个零点;

即关于 x 的方程 $f(x)+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}ax^2-x^3$ 有唯一实数解. 12 分

22. 【解析】(1) 由题可知, 抛物线 $C_1: y^2=2px (p>0)$ 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$,

则有 $\frac{(-\frac{p}{2})^2}{4}+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1$ 得 $p=2$, 所以 $C_1: y^2=4x$ 4 分

(2) 设点 P 坐标为 (x_0, y_0) , 且满足 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1 (x_0 \leq 0)$

由题意可知切线斜率不会为 0, 即设切线 PC 为 $(x-x_0)=m_1(y-y_0)$,

代入 $C_1: y^2=4x$ 得 $y^2-4m_1y+4m_1y_0-4x_0=0$,

由 $\Delta=0$ 可得 $(-4m_1)^2-4(4m_1y_0-4x_0)=0 \Rightarrow m_1^2-y_0m_1+x_0=0$. ① 5 分

设切点 $C(x_1, y_1)$, 抛物线的上半部曲线函数关系式为 $y=2\sqrt{x}, y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$,

则 $y'|_{x=x_1}=\frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{1}{m_1}$, 故 $y_1=2\sqrt{x_1}=2m_1$, 将其代入①可得 $y_1^2-2y_0y_1+4x_0=0$. ②

设切线 PD 为 $(x-x_0)=m_2(y-y_0)$, 切点 $D(x_2, y_2)$,

同理可得 $y_2^2-2y_0y_2+4x_0=0$. ③

由②③可知 y_1, y_2 是方程 $y^2-2y_0y+4x_0=0$ 的两根, 7 分

所以 $y_1+y_2=2y_0, y_1 \cdot y_2=4x_0$, 又 $y_1^2=4x_1, y_2^2=4x_2$,

所以代入②③可知 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ 是 $2x-y_0y+2x_0=0$ 的两点,

即 CD 直线方程为 $2x-y_0y+2x_0=0$ 9 分

则 $S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}d \cdot |CD|=\frac{1}{2} \cdot \frac{|2x_0-y_0^2+2x_0|}{\sqrt{4+y_0^2}} \cdot \sqrt{1+(\frac{y_0}{2})^2} \sqrt{4y_0^2-16x_0}=\frac{(\sqrt{y_0^2-4x_0})^3}{2}$

又因为 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$ 且 $x_0 \in [-2, 0]$, 所以 $S_{\triangle PCD}=\frac{(\sqrt{-x_0^2-16x_0+4})^3}{16}$.

令 $t=-x_0^2-16x_0+4, x_0 \in [-2, 0]$, 由二次函数性质可知, 其在 $x_0 \in [-2, 0]$ 上单调递减,

故 $t \in [4, 32]$, 所以 $S_{\triangle PCD}=\frac{(\sqrt{-x_0^2-16x_0+4})^3}{16}=\frac{(\sqrt{t})^3}{16} \in [\frac{1}{2}, 8\sqrt{2}]$ 12 分